MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

Nota bene :

1. Dans tout le problème, le corps de base est celui des nombres réels.
2. Si E est un événement quelconque, la probabilité de E est notée P(E).
3. Toutes les variables aléatoires envisagées (en abrégé v.a.) sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.
4. On rappelle qu'une v.a. uniforme sur $[0,1]$ peut être définie à l'aide de sa fonction de répartition F, telle que :
$$F(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \leqslant 0;$$
$$F(x) = x \quad \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1;$$
$$F(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \geqslant 1.$$
5. Si $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont k réels, $\sup(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ et $\inf(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ désignent respectivement le plus grand et le plus petit de ces réels.
6. On notera respectivement, lorsqu'elles existent, $\mathscr{E}(X)$ et $\mathscr{V}(X)$ l'espérance mathématique et la variance de la v.a. X.
7. Les résultats numériques seront à donner sous forme de fractions irréductibles. Aucun calcul décimal approché n'est demandé.

PARTIE 1

1. On note X_1, X_2 deux v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont les fonctions de répartition sont notées respectivement F_1 et F_2.

On pose :
$$U = \sup(X_1, X_2);$$
$$V = \inf(X_1, X_2).$$

Montrer que les fonctions de répartition de U et de V, notées respectivement Φ et Ψ, sont définies respectivement par :

$\forall x \in \mathbb{R}$
$$\Phi(x) = F_1(x)\,F_2(x);$$
$$\Psi(x) = 1 - [1 - F_1(x)]\,[1 - F_2(x)].$$

2. Étendre les formules de la question précédente au cas de n v.a. mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}$, notées $X_1, X_2, \ldots, X_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier quelconque, et dont les fonctions de répartition sont notées respectivement $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

PARTIE 2

Trois personnes, notées A, B, C, entrent simultanément dans un bureau pourvu de deux cabines téléphoniques seulement.

Une unité de temps étant choisie, A et B occupent simultanément à l'instant 0 les deux cabines. C attend et occupe la première cabine disponible, lorsque l'une des deux autres personnes a teminé sa communication.

On suppose que :

— les durées de communication de A, B et C sont des v.a. mutuellement indépendantes, suivant la même loi uniforme sur $[0,1]$, notées respectivement X, Y et Z ;

— la durée du changement d'intervenant dans une cabine est négligeable.

1. On pose :
$$U = \sup(X, Y);$$
$$V = \inf(X, Y).$$

Définir par leurs fonctions de répartition Φ et Ψ, que l'on calculera, les lois des v.a. U et V. Calculer l'espérance et la variance de chacune des variables aléatoires U et V.

Tournez la page S.V.P.

2. On pose $W = |X - Y|$.

   Définir par sa fonction de répartition Θ la loi de la v.a. W.

   Que peut-on dire des v.a. V et W ?

3. Définir par sa densité le couple (W, Z). Les variables W et Z sont-elles indépendantes ?

4. Calculer $P(Z \geqslant W)$, c'est-à-dire la probabilité de l'événement « C termine sa communication en dernier ».

5. On pose $T = V + Z$.

   T représente donc le temps total passé par C dans le bureau de poste.

   Définir par sa densité la loi du couple (V, Z).

   Déterminer complètement la loi de probabilité de T en calculant sa fonction de répartition S et sa dérivée S'.

   On devra, pour traiter cette question, distinguer les deux cas $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $1 \leqslant t \leqslant 2$ dans le calcul de $S(t)$. On vérifiera, sur les résultats trouvés, que S est bien continue pour $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$.

6. Calculer $\mathscr{E}(T)$, $\mathscr{E}(T^2)$ et $\mathscr{V}(T)$.

PARTIE 3

Dans cette partie, n désigne un entier tel que $n \geqslant 2$. Les personnes arrivant simultanément à la poste, au nombre de n, sont notées $A_1, \ldots, A_n$.

Le bureau de poste comporte exactement n cabines, qui sont immédiatement employées par $A_1, \ldots, A_n$.

Les durées de communication de $A_1, \ldots, A_n$, notées respectivement $X_1, \ldots, X_n$, sont des v.a. mutuellement indépendantes, toutes uniformes sur $[0, 1]$. On observera que le cas $n = 2$ est celui traité dans la partie 2 à ceci près que les personnes A et B sont notées ici A_1 et A_2.

1. On pose :

$$U_n = \sup(X_1, \ldots, X_n);$$
$$V_n = \inf(X_1, \ldots, X_n).$$

   Définir par leurs fonctions de répartition Φ_n et Ψ_n les lois des v.a. U_n et V_n.

2. En notant u et v les coordonnées d'un élément de $\mathbf{R}^2$, on définit par $\delta_n(u, v)$, la densité du couple (U_n, V_n).

   Montrer que $\delta_n(u, v) = \begin{cases} n(n-1)(u-v)^{n-2} \text{ pour } 0 \leqslant u \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant v \leqslant u, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

3. Calculer $\mathscr{E}(U_n)$, $\mathscr{E}(U_n^2)$ et $\mathscr{V}(U_n)$, ainsi que $\mathscr{E}(V_n)$, $\mathscr{E}(V_n^2)$ et $\mathscr{V}(V_n)$.

4. Calculer la covariance de U_n et V_n, notée $\mathrm{Cov}(U_n, V_n)$.

5. Calculer le coefficient de corrélation, noté r_n, de U_n et V_n. Vérifier que r_n s'exprime par une fraction rationnelle très simple en n.

FIN